Leçon 157 - Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.

Cadre : K est un corps, E un K-ev de dimension finie n, $\overline{K}$ est la clôture algébrique de K.

1. Endomorphismes trigonalisables. —

1. *Outils de trigonalisation.* —

- Pro+Def : Pour tout $f \in End(E)$, il existe un unique polynôme unitaire $\mu_f \in K[X]$ qui engendre l'idéal des polynômes annulant f. On l'appelle polynôme minimal de f.
- Def+Pro : Pour $f \in End(E)$, B une base de E, on définit $\chi_f(X) := det(Mat(f,B) - XI_n)$ le polynôme caractéristique de f.
  χ_f ne dépend pas du choix de la base de E.
- Théorème de Hamilton-Cayley : $\chi_f(f) = 0$, càd $\mu_f | \chi_f$.
- Def : Soit $f \in End(E)$. Pour $\lambda \in K$ une valeur propre de f, on définit $E_\lambda := Ker(f - \lambda.Id_E)$ l'espace propre associé à la valeur propre λ.
- Pro : Soit λ une valeur propre de f. Soit v_λ la multiplicité de $(X-\lambda)$ dans χ_f. On a alors : $1 \leq dim(Ker(f-\lambda.Id_E)) \leq v_\lambda$.
- Lemme des noyaux : Soit $P = P_1..P_r \in K[X]$ avec P_i premiers entre eux.
  Alors $Ker(P(f)) = \oplus_i Ker(P_i(f))$

2. *Définitions et caractérisations.* —

- Def : Une matrice $M \in M_n(K)$ est trigonalisable sur K si elle est semblable dans $Gl_n(K)$ à une matrice triangulaire supérieure.
- Def : $f \in End(E)$ est trigonalisable dans E si pour une base B de E, $Mat(f,B)$ est trigonalisable sur K.
- Rem : La matrice de f dans une base est trigonalisable ssi la matrice de f dans toute base est trigonalisable.
- Thm : Soit $f \in End(E)$. On a les équivalences :
  i) f est trigonalisable dans E.
  ii) χ_f est scindé sur K.
  iii) μ_f est scindé sur K.
  iv) Il existe $P \in K[X]$ scindé tel que $P(f) = 0$.
- Cor : Si K est algébriquement clos, tout endomorphisme est trigonalisable.
- Ex : $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est trigonalisable sur $\mathbb{C}$ mais pas sur $\mathbb{R}$.
- App : $\forall A \in M_n(\mathbb{C})$, $det(exp(A)) = exp(Tr(A))$.
- App : $\forall A \in M_n(K)$, $Tr(A) = \sum_{\lambda \in Sp_{\overline{K}}(A)} \lambda.v_\lambda$, et $det(A) = \Pi_{\lambda \in Sp_{\overline{K}}(A)} \lambda^{v_\lambda}$.
- App : Si K est algébriquement clos, $\forall A \in M_n(K)$ on a : $Sp_K(P(A)) = P(Sp_K(A))$.
- Contre-ex : Pour la matrice B précédente, on a $Sp_{\mathbb{R}}(B) = \emptyset$ mais$Sp_{\mathbb{R}}(B^2) = \{-1\}$.

3. *Trigonalisation simultanée.* —

- Pro : Si deux endomorphismes u et v commutent, alors les espaces propres de u et $Im(u)$ sont v-stables.
- Pro : Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille quelconque d'endomorphismes trigonalisables de E qui commutent deux à deux.
  Alors il existe une base B de E dans laquelle $\forall i \in I$, $Mat(f_i, B)$ est triangulaire supérieure.
- Contre-ex : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont simultanément trigonalisables mais ne commutent pas.
- Pro : La somme et la composée d'endomorphismes trigonalisables qui commutent est encore trigonalisable.
- Pro : Pour $M, N \in M_n(K)$, $U \mapsto MU - UN$ est trigonalisable sur $M_n(K)$ ssi M et N sont trigonalisables sur K^n.

2. Endomorphismes nilpotents. —

1. *Définition et caractérisations.* —

- Def : $f \in End(E)$ est nilpotent ssi $\exists k \geq 0$ tq $f^k = 0$.
  Pour r le plus petit entier tel que $f^r = 0$, on dit que f est nilpotente d'indice r.
- Def : On définit $\mathcal{N}(E)$ l'ensemble des endomorphismes nilpotents de E.
- Exemple de matrice nilpotente.
- Pro : Si f est nilpotent d'indice r alors $\mu_f = X^r$.
- Rem : Le théorème de Hamilton-Cayley nous assure que l'indice de nilpotence r vérifie $r \leq n$.
- Rem : La relation entre valeurs propres de f et facteurs irréductibles de degré 1 de χ_f nous permet de conclure que $f \in \mathcal{N}(E) \Leftrightarrow \chi_f = (-1)^n X^n$.
- Pro : Soit f nilpotente d'indice r. Alors il existe $x \in E$ tel que $(x, f(x), .., f^{r-1}(x))$ soit une famille libre.
- Thm : Soit $f \in End(E)$. $f \in \mathcal{N}(E) \Leftrightarrow$ f est trigonalisable et $Sp_K(f) = \{0\}$
- Contre-ex : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R})$ est de spectre réduit à 0 mais n'est pas nilpotente car $\chi_A = -X(X^2+1)$.
- Thm : Si $car(K) = 0$, on a $f \in \mathcal{N}(E) \Leftrightarrow Tr(f^k) = 0\ \forall 1 \leq k \leq n$.
- Contre-ex : En caractéristique p, les I_p^k sont de trace nulle mais I_p n'est pas nilpotente.

2. *Le cône nilpotent $\mathcal{N}(E)$.* —

- Rem : La somme et la composée de deux nilpotents qui commutent est nilpotente.
- Contre-ex : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ est inversible.
- Pro : $\mathcal{N}(E)$ n'est pas stable par multiplication/addition d'endomorphismes nilpotents quelconques, mais il est stable par multiplication par un scalaire.
  $\mathcal{N}(E)$ est ainsi un cône.
- Pro : $Vect(\mathcal{N}(E)) = Ker(Tr)$.

- Dessin du cône nilpotent en dimension 2 en annexe.

3. Applications à la réduction. —

1. Décomposition de Jordan-Chevalley. —

- Pro : Pour $\chi_f = P_1..P_r \in K[X]$ avec P_i premiers entre eux deux à deux, la projection sur $Ker(P_i(f))$ parallèlement à $\oplus_{j\neq i} Ker(P_j(f))$ est un polynôme en f.
- **Dev** : Décomposition de Jordan-Chevalley : Soit $f \in End(E)$ tel que χ_f est scindé sur K.
  Alors il existe un unique couple $(d, n) \in End(E)^2$ tel que :
  i) d est diagonalisable, n est nilpotent.
  ii) f = d + n.
  iii) n et d commutent.
  iv) d et n sont des polynômes en f.
- Algorithme de calcul de d et n par méthode de Newton polynômiale.

2. Réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents. —

- Def : Le bloc de Jordan de taille $r \geq 1$ associé à λ, et noté $J_{r,\lambda}$, est la matrice de $M_r(K)$ avec λ sur la diagonale, et des 1 juste au-dessus de la diagonale.
- Def : Pour $r \geq 2$, on définit $N_r \in M_r(K)$ la matrice avec des 1 juste au-dessus de la diagonale. On définit $N_1 = (0) \in M_1(K)$.
- Pro : Soit $r \geq 1$. On a $J_{r,\lambda} = \lambda.I_r + N_r$, et N_r est nilpotente d'indice r.
- Théorème de réduction de Jordan des endomorphismes nilpotents : Soit $f \in \mathscr{N}(E)$ d'indice r. Alors il existe une base B de E et des $0 \leq n_1 \leq .. \leq n_s \leq r$ tels que $Mat(f, B) = Diag(N_{n_1}, .., N_{n_s})$.
- Rem : Deux matrices par blocs de la forme donnée par le théorème de réduction de Jordan nilpotent ne sont pas semblables.
- Ex : $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ n'est pas semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
- Cor : Le nombre de classe de similitude de $\mathscr{N}(E)$ est égal au nombre de partitions de $dim(E)$.
- Pro : Soit $f \in End(E)$ et $\lambda \in Sp_k(f)$. Alors la restriction de $(f - \lambda.Id_E)$ à $Ker(f - \lambda.Id_E)^{v_\lambda}$ est nilpotente d'indice $\leq v_\lambda$.
- Théorème de réduction de Jordan des endomorphismes trigonalisables : Soit $f \in End(E)$ trigonalisables. Soient λ_i les valeurs propres de f. Alors il existe une base B de E dans laquelle $Mat(f, B)$ est une matrice diagonale de blocs de Jordan $J_{r_{i,j},\lambda_i}$.
- Rem : La décomposition de Jordan d'un endomorphisme trigonalisable est unique à l'ordre près des blocs diagonaux.

3. Propriétés topologiques. —

- Pro : Pour $K = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, $f \mapsto d$ dans la décomposition de Dunford n'est pas continue.
- **Dev** : Soit $n \geq 1$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$. On a les propriétés suivantes :
  i) La matrice A est nilpotente ssi 0 appartient à l'adhérence de la classe de similitude de A.
  ii) La matrice A est diagonalisable ssi la classe de similitude de A est fermée.

Références

Objectif Agrégation : Polynôme minimal, polynôme caractéristique, lemme des noyaux, Hamilton-Cayley, propriétés des valeurs propres. CNS de trigonalisabilité, cas d'un corps algébriquement clos, exemple, $det(exp) = exp(Tr)$. Trigonalisation simultanée d'une somme. Nilpotent, exemple, $\mathscr{N}$, CNS de nilpotence, propriétés d'un nilpotent. Cône nilpotent, espace vectoriel engendré, homéo entre nilpotents sur $\mathbb{C}$ et unipotents. Propriétés topologiques des matrices diagonalisables/trigonalisables.

Gourdon : Endomorphisme trigonalisable, matrice trigonalisable. Trigonalisation simultanée. Décomposition de Jordan-Chevalley.(Dev), algorithme. Th de Jordan nilpotent, nombre de classes de similitude, Th de Jordan trigonalisable, applications.

Grifone : Méthodes de calcul d'une puissance/exponentielle de matrices, exponentielle d'un bloc de Jordan.

FGN (Algèbre 1) : Topologie des classes de similitude matricielle.(Dev)

June 3, 2017

Vidal Agniel, École normale supérieure de Rennes